

Ex.22 证明. 首先证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 同解.

先设 x 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 两边左乘 A^T 得 $A^T Ax = 0$, 即 x 也是齐次线性方程组 $A^T Ax = 0$ 的解.

反之, 设 x 是齐次线性方程组 $A^T Ax = 0$ 的解, 两边左乘 x^T 得 $x^T A^T Ax = 0$. 记 $y = Ax$, 则 $y^T y = 0$, 于是, $y = 0$, 即 $Ax = 0$.

所以, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 同解. 于是, $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$.